§ 6. УДАР ДВУХ ТЕЛ

В прикладных задачах обычно встречается удар двух тел, движущихся поступательно или вращающихся вокруг параллельных или совпадающих осей. Рассмотрим некоторые особенности применения общих теорем и теоремы Карно в этих случаях.

Пусть два тела *1* и *2* массами m_1 и m_2 непосредственно до и после удара движутся поступательно (рис. 157). Их скорости перед ударом $\bar v_1$ и $\bar v_2$; после удара — соответственно $\bar u_1$ и $\bar u_2$. У соударяющихся тел отсутствует ударное трение. Ударные импульсы в этом случае направлены по общей

нормали в месте соприкосновения, т. е. по так называемой линии удара. В случае **центрального** удара линия удара проходит через центры масс тел. Применим теорему об изменении количества движения при ударе к каждому телу в отдельности. Имеем

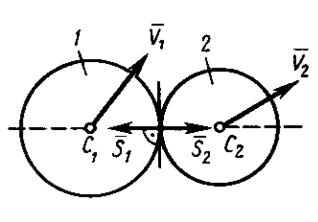

Рис. 157

$$m_1\bar u_1-m_1\bar v_1=\bar S_1;\quad m_2\bar u_2-m_2\bar v_2=\bar S_2. \tag{19}$$

При ударе двух тел $\bar S_1=-\bar S_2$ по закону о равенстве действия и противодействия, поэтому из (19) получаем

$$m_1\bar u_1+m_2\bar u_2=m_1\bar v_1+m_2\bar v_2, \tag{20}$$

т. е. *количество движения при ударе двух тел не изменяется.* Если удар абсолютно неупругий, то скорости тел после удара одинаковы и равны $\bar u$. Из (20) тогда имеем

$$\bar u=\frac{m_1\bar v_1+m_2\bar v_2}{m_1+m_2}. \tag{21}$$

При **прямом** ударе двух тел скорости их $\bar v_1$ и $\bar v_2$ до удара направлены по линии удара и тогда из (21), проецируя на линию удара, получаем

$$u=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}. \tag{21'}$$

Здесь u, v_1, v_2 — алгебраические значения скоростей. Для того чтобы удар произошел, скорости тел $\bar v_1$ и $\bar v_2$ должны быть направлены в одну и ту же сторону, а их числовые значения — удовлетворять условию $v_1>v_2$.

Для прямого центрального удара двух тел к каждому телу для первой и второй фаз применим теорему об изменении количества движения в проекции на ось Ox, направленную по линии удара (рис. 158). Получим

$$\left.\begin{aligned}&m_1u-m_1v_1=-S'_1;\\&m_1u_1-m_1u=-S''_1;\\&m_2u-m_2v_2=-S'_2;\\&m_2u_2-m_2u=S''_2;\\&S'_1=S'_2;\ S''_1=S''_2,\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где u — общая скорость тел в конце первой фазы; S'_1, S'_2 и S''_1, S''_2 — ударные импульсы соответственно за первую и вторую фазы удара. К уравнениям (22) следует присоединить выражение для коэффициента восстановления через ударные импульсы. Имеем

$$k=S''_1/S'_1=S''_2/S'_2. \tag{22'}$$

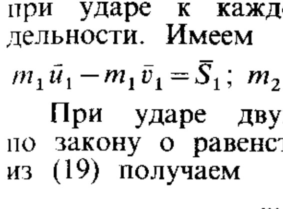

Рис. 158

Получили семь алгебраических уравнений (22) и (22′), из которых можно определить u, u_1, u_2, S'_1, S'_2, S''_1, S''_2, если известны скорости до удара v_1, v_2 и коэффициент восстановления k. Из уравнений (22) и (22′), в частности, можно получить формулы

$$k=-\frac{u_1-u_2}{v_1-v_2}, \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned}&u_1-v_1=-(1+k)\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2);\\&u_2-v_2=(1+k)\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_1-v_2).\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Используя (22) и (22′) и следствия из них, можно вычислить потерю кинетической энергии тел T_0-T при ударе:

$$T_0-T=\left(\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}\right)-\left(\frac{m_1u_1^2}{2}+\frac{m_2u_2^2}{2}\right)=$$
$$=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(1-k^2)(v_1-v_2)^2. \tag{25}$$

При абсолютно упругом ударе двух тел $k=1$ и $T_0=T$, т. е. потери кинетической энергии не происходит. При абсолютно неупругом ударе $k=0$ и

$$T_0-T=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(v_1-v_2)^2. \tag{25'}$$

Если использовать потерянные телами за время удара скорости v_1-u и v_2-u, то потерю кинетической энергии можно также получить в форме теоремы Карно для удара двух тел:

$$T_0-T=\frac{m_1}{2}(v_1-u)^2+\frac{m_2}{2}(v_2-u)^2. \tag{25''}$$

При абсолютно неупругом ударе двух поступательно движущихся тел для каждого тела налагаемая связь не является стационарной и условия $\bar S_1\cdot\bar u=0$ и $\bar S_2\cdot\bar u=0$ по отдельности не выполняются. Они использовались при выводе теоремы Карно для системы. Но выполняется условие для двух тел

$$\bar S\cdot\bar u=\bar S_1\cdot\bar u+\bar S_2\cdot\bar u=(\bar S_1+\bar S_2)\cdot\bar u=0, \tag{26}$$

так как

$$\bar S=\bar S_1+\bar S_2=0,$$

поэтому теорема Карно (25″) остается справедливой. Ее можно получить непосредственно преобразованием потерянной энер-

гии, применяя следствия из (22) и (22′) без использования условия (26). Условие (26) для удара двух поступательно движущихся тел расширяет область применения теоремы Карно.

Из теоремы Карно (25″) для двух тел можно получить общую скорость тел после удара при прямом центральном ударе этих тел:

$$u=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}.$$

Частные случаи. 1. Пусть m_1, m_2 и v_1, v_2 — соответственно массы и скорости первого и второго тела до удара, причем $v_2=0$.

Кинетическая энергия тел до удара в этом случае

$$T_0=m_1v_1^2/2.$$

Общая скорость после абсолютно неупругого прямого удара

$$u=m_1v_1/(m_1+m_2).$$

Кинетическая энергия тел после удара

$$T=(m_1+m_2)\frac{u^2}{2}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{m_1v_1^2}{2}=\frac{m_1}{m_1+m_2}T_0. \tag{27}$$

Потеря кинетической энергии, затраченная на деформацию тел,

$$T_0-T=\left(1-\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)T_0=\frac{m_2}{m_1+m_2}T_0. \tag{28}$$

Если $m_2\gg m_1$, то, полагая $m_2/(m_1+m_2)\approx1$, согласно (28), имеем

$$T_0-T\approx T_0,$$

т. е. почти вся энергия тел, которую они имели до удара, затрачивается на деформацию тел. Такой случай имеет место при ковке и в других аналогичных случаях. В этом случае m_2 — масса наковальни вместе с поковкой (они покоятся перед ударом), а m_1 и v_1 — соответственно масса и скорость молота до удара по поковке. Энергия тел при ковке, которая затрачивается на преодоление различных сопротивлений при последующем движении,

$$T=\frac{m_1}{m_1+m_2}T_0\approx0,$$

т. е. на преодоление сопротивлений энергия не тратится. Очевидно, чем больше m_2 по сравнению с m_1, тем эффективнее работа молота.

2. Если $m_1\gg m_2$, то для потери кинетической энергии на сам удар, считая $m_2/(m_1+m_2)\approx0$, имеем

$$T_0-T=\frac{m_2}{m_1+m_2}T_0\approx0.$$

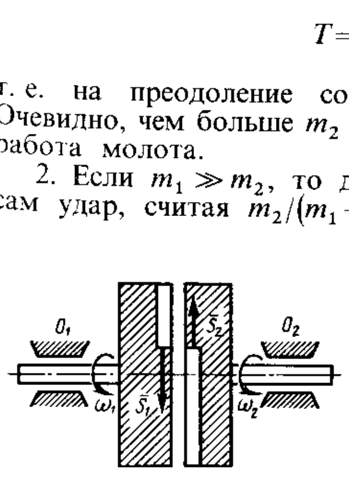

Рис. 159

В этом случае потери энергии на удар почти нет и вся первоначальная энергия затрачивается на преодоление сопротивления движению тел после удара, так как

$$T=\frac{m_1}{m_1+m_2}T_0\approx T_0.$$

Такой случай имеет место при забивке свай, костылей, гвоздей и т. п. Для наибольшей эффективности этих процессов должно выполняться условие $m_1\gg m_2$. В этом случае m_1 — масса бабы или кувалды (молотка), v_1 — их скорость до удара, а m_2 и $v_2=0$ — соответственно масса сваи или костыля (гвоздя) и скорость до удара. Их масса, чтобы рационально использовалась энергия, должна быть много меньше массы бабы или кувалды. Вся кинетическая энергия бабы или кувалды при таком ударе не тратится на деформации при ударе, а передается свае или костылю, которые движутся вместе с забивающими их бабой и кувалдой. Эта энергия расходуется на преодоление сопротивления движению сваи или костыля при последующем движении в среде, в которую они забиваются.

При рассмотрении удара двух тел, вращающихся вокруг одной оси или параллельных осей, следует применять теорему об изменении кинетического момента к каждому телу или теорему Карно. При применении теоремы об изменении кинетического момента к двум телам вместе при вращении тел вокруг параллельных осей войдут моменты неизвестных ударных импульсов в местах закрепления по крайней мере одной из осей вращения. Эти моменты сами являются неизвестными. Применение общих теорем при ударе к одному телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, рассмотрено в следующем параграфе. Здесь отметим только некоторые особенности применения теоремы Карно к системе двух вращающихся тел.

При вращении двух тел вокруг одной оси (рис. 159) O_1O_2 с угловыми скоростями до удара ω_1 и ω_2 в одном и том же направлении и моментами инерции относительно этой оси J_1 и J_2 можно применить теорему Карно, если удар тел выступами при сближении абсолютно неупругий. Здесь выполняется условие применимости этой теоремы для двух тел $\bar S\cdot\bar u=0$, так как $\bar S=\bar S_1+\bar S_2=0$, хотя для каждого тела в отдельности $\bar S_1\cdot\bar u\neq0$ и $\bar S_2\cdot\bar u\neq0$. Согласно теореме Карно, имеем

$$\frac{J_1\omega_1^2}{2}+\frac{J_2\omega_2^2}{2}-(J_1+J_2)\frac{\omega^2}{2}=\frac{J_1}{2}(\omega_1-\omega)^2+\frac{J_2}{2}(\omega_2-\omega)^2, \tag{29}$$

где ω — общая угловая скорость тел после удара; $\omega_1-\omega$ и $\omega_2-\omega$ — потерянные угловые скорости тел. После несложных преобразований из (29) получим следующую формулу для угловой скорости тел после удара:

$$\omega=\frac{J_1\omega_1+J_2\omega_2}{J_1+I_2}. \tag{30}$$

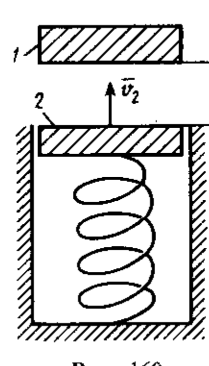

Рис. 160

Это же значение ω можно получить применяя теорему об изменении кинетического момента относительно оси вращения для двух тел, так как в этом случае сумма моментов ударных импульсов от действия подшипников и от выступов относительно оси вращения равна нулю, если отсутствует ударное трение в подшипниках и на выступах.

Если тела до удара вращались в противоположных направлениях, то в (30) следует брать алгебраические значения угловых скоростей тел.

Пример 1. Груз *1* массой m_1 до удара о плиту *2* массой m_2 падал с высоту h без начальной скорости (рис. 160). Плита *2*, закрепленная на пружине с коэффициентом жесткости c, совершает колебания и в момент удара имеет скорость $v_2=\sqrt{2gh}$, направленную вверх. Пружина при этом деформирована на величину $\lambda_0=\dfrac{m_2g}{c}$.

Определить наибольшую величину деформации пружины, считая удар тел абсолютно неупругим.

Решение. Груз *1* перед ударом вследствие падения с высоту h имеет скорость $v_1=\sqrt{2gh}$, направленную вниз. В результате абсолютно неупругого удара оба тела приобретут одинаковую скорость $\bar u$ и будут дальше двигаться вместе как одно тело. Для определения этой скорости применим теорему Карно для мгновенного наложения связей

$$T-T^{(0)}=\sum_k\frac{1}{2}(\bar v_k-\bar u_k)^2. \tag{а}$$

Условия применения этой теоремы выполняются, т. е.

$$\bar S_1\cdot\bar u+\bar S_2\cdot\bar u=(\bar S_1+\bar S_2)\cdot\bar u=0,$$

так как $\bar S_1+\bar S_2=0$ и ударный импульс от пружины равен нулю.

В рассматриваемом случае кинетическая энергия перед ударом

$$T^{(0)}=m_1v_1^2/2+m_2v_2^2/2.$$

После удара кинетическая энергия

$$T=(m_1+m_2)u^2/2.$$

Потерянные при ударе скорости для тел соответственно равны (v_1-u) и $(-v_2-u)$.

Кинетическая энергия от этих скоростей

$$\sum_k\frac{1}{2}(\bar v_k-\bar u_k)^2=m_1(v_1-u)^2/2+m_2(-v_2-u)^2/2.$$

Подставляя полученные значения величин в (а) после несложных преобразований, получаем

$$u=\frac{m_1v_1+m_2(-v_2)}{m_1+m_2}=\frac{(m_1-m_2)\sqrt{2gh}}{m_1+m_2}. \tag{б}$$

Если масса плиты $m_2=0$, то $u=v_1$ и изменения скорости груза при ударе по пружине не происходит.

Скорость u можно вычислить также применяя к удару теорему об изменении количества движения для груза и плиты в проекции на ось Ox, направленную вниз. Имеем

$$Q_x-Q_x^{(0)}=\sum_k S_{kx}^{(e)}. \tag{в}$$

Количества движения перед ударом и после удара соответственно равны

$$Q_x^{(0)}=m_1v_1+m_2(-v_2);\qquad Q_x=(m_1+m_2)u.$$

Внешний ударный импульс, действующий на соударяющиеся тела, может создать только пружина. Импульсами неударных сил за время удара следует пренебречь. Пружина создает силу упругости, а следовательно импульс, вследствие деформации, которая за время удара произойти не успевает. Таким образом, $\sum_k S_{kx}^{(e)}=0$ и из (в) получаем опять

$$u=\frac{m_1v_1+m_2(-v_2)}{m_1+m_2}.$$

Имея скорость u, тела, двигаясь, будут деформировать пружину. Наибольшая деформация ее произойдет при скорости тел $v=0$. По теореме об изменении кинетической энергии от момента после удара до остановки тел при изменении направления движения имеем

$$T-T_0=\sum_k A_k^{(e)}. \tag{г}$$

В момент наибольшей деформации $T=0$, а после удара

$$T_0=(m_1+m_2)u^2/2=(m_1+m_2)\frac{(m_1-m_2)^2 2gh}{2(m_1+m_2)^2}=\frac{(m_1-m_2)^2gh}{m_1+m_2}.$$

Работу внешних сил тяжести и упругости на перемещении s вычисляем по формуле

$$\sum_k A_k^{(e)}=(m_1+m_2)gs-\frac{c}{2}(\lambda^2-\lambda_0^2),$$

где $\lambda=\lambda_0+s$, $\lambda_0=m_2g/c$.

Подставляя вычисленные значения величин в (г), получим

$$\frac{-(m_1-m_2)^2gh}{m_1+m_2}=(m_1+m_2)gs-\frac{c}{2}(\lambda_0^2+s^2+2\lambda_0s-\lambda_0^2).$$

Так как $c\lambda_0=m_2g$, то после сокращений имеем

$$\frac{-(m_1-m_2)^2gh}{m_1+m_2}=m_1gs-\frac{cs^2}{2},$$

или

$$s^2-\frac{2m_1g}{c}s-\frac{2gh(m_1-m_2)^2}{c(m_1+m_2)}=0.$$

Решая квадратное уравнение и отбрасывая знак минус перед квадратным корнем, дающий отрицательное значение s, получаем

$$s=\frac{m_1g}{c}+\sqrt{\frac{m_1^2g^2}{c^2}+\frac{2gh(m_1-m_2)^2}{c(m_1+m_2)}}.$$

Наибольшая деформация пружины будет

$$\lambda=\lambda_0+s=\frac{(m_1+m_2)g}{c}+\sqrt{\frac{m_1^2g^2}{c^2}+\frac{2gh(m_1-m_2)^2}{c(m_1+m_2)}}.$$

При $m_2=0$

$$\lambda=\frac{m_1g}{c}+\sqrt{\frac{m_1^2g^2}{c^2}+\frac{2ghm_1}{c}}.$$

Учитывая это в случае $m_1g/c=\lambda_{ст}$, получаем

$$\lambda=\lambda_{ст}+\sqrt{\lambda_{ст}^2+2\lambda_{ст}h},$$

что совпадает со значением, полученным в примере 1 (см. § 5 гл. 4).

Пример 2. Однородный прямоугольный контейнер высотой h и шириной l находится на платформе, движущейся по прямолинейному пути со скоростью v (рис. 161).

Определить условие для скорости платформы, при выполнении которого не произойдет опрокидывания контейнера вокруг его закрепленного ребра при мгновенной остановке платформы. Крепление ребра контейнера не оказывает сопротивления его повороту вокруг этого ребра.

Решение. Применим к контейнеру при остановке платформы теорему об изменении кинетического момента относительно закрепленного ребра Oz при ударе:

$$K_{Oz}-K_{Oz}^{(0)}=\sum_k M_{Oz}(\bar S_k^{(e)}). \tag{а}$$

Внешними ударными импульсами является только ударный импульс $\bar S_0$ от действия крепления ребра контейнера. Он пересекает ось Oz, поэтому при отсутствии ударного трения

$$\sum_k M_{Oz}(\bar S_k^{(e)})=M_{Oz}(\bar S_0)=0.$$

После мгновенной остановки платформы контейнер начнет вращаться вокруг оси Oz с угловой скоростью ω. Для кинетического момента контейнера относительно закрепленного ребра имеем

$$K_{Oz}=J_{Oz}\omega, \tag{б}$$

где J_{Oz} — момент инерции контейнера относительно закрепленного ребра. До остановки контейнер двигался вместе с платформой поступательно. Его кинетический момент относительно оси Oz определяют суммированием кинетических моментов малых частиц, на которые мысленно разбиваем контейнер. Имеем

$$K_{Oz}^{(0)}=\sum_k m_kvy_k=v\sum_k m_ky_k, \tag{в}$$

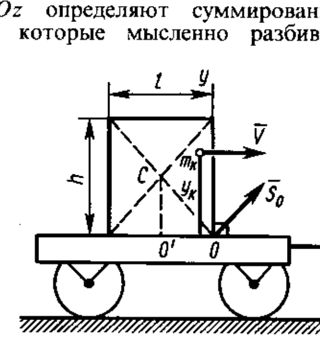

Рис. 161

где m_k — масса элементарной частицы контейнера; y_k — координата этой частицы по оси Oy. Но

$$\sum_k m_ky_k=My_C=Mh/2, \tag{г}$$

где $y_C=h/2$ — координата центра масс контейнера по оси Oy. Подставляя значения величин из (б), (в) и (г) в уравнение (а), получим

$$J_{Oz}\omega-M\frac{h}{2}v=0. \tag{а'}$$

Для угловой скорости контейнера в момент остановки платформы имеем

$$\omega=\frac{Mhv}{2J_{Oz}}. \tag{д}$$

Применим к контейнеру после получения им угловой скорости ω теорему об изменении кинетической энергии

$$T-T_0=\sum_k A_k^{(e)}. \tag{е}$$

За начальное положение примем положение контейнера сразу после остановки платформы по окончании удара. В этом положении кинетическая энергия выразится как

$$T_0=J_{Oz}\omega^2/2.$$

В качестве конечного примем положение контейнера при наивысшем положении его центра масс, т. е. положение после поворота контейнера на 45°. Чтобы контейнер не опрокинулся, необходимо, чтобы угловая скорость его в этом положении была равна нулю, т. е. $T=0$.

Внешними силами для контейнера являются сила его тяжести $P=Mg$ и реакция $\bar N$ ребра Oz. Поэтому работа внешних сил сведется только к работе силы тяжести при подъеме центра масс на высоту $(OC-h/2)$. Работа силы реакции $\bar N$ равна нулю. Имеем

$$\sum_k A_k^{(e)}=-P(OC-h/2),$$

где $OC=\sqrt{l^2+h^2}/2$. Подставляя все вычисленные величины в (*е*), получим

$$-J_{Oz}\omega^2/2=-P\left(\sqrt{l^2+h^2}-h\right)/2,$$

или

$$J_{Oz}\left(\frac{Mhv}{2J_{Oz}}\right)^2=Mg\left(\sqrt{l^2+h^2}-h\right).$$

Отсюда получаем для скорости платформы следующее условие, при котором не произойдет опрокидывания контейнера:

$$v\leqslant2\sqrt{\frac{J_{Oz}g}{Mh}\left(\sqrt{\frac{l^2}{h^2}+1}-1\right)}. \tag{ж}$$

Для момента инерции J_{Oz} по теореме о моментах инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс, имеем

$$J_{Oz}=J_{Cz}+M(OC)^2.$$

Аналогично для оси $O'z$, параллельной Oz,

$$J_{O'z}=J_{Cz}+M(O'C)^2.$$

Исключая из этих двух выражений J_{Cz}, получим

$$J_{Oz}-J_{O'z}=M\left[(OC)^2-(O'C)^2\right];\qquad J_{Oz}=J_{O'z}+M\left[(OC)^2-(OC)^2\right]. \tag{з}$$

Момент инерции $J_{O'z}$ определяем по формуле (13) (см. § 4 гл. 3) для однородной прямоугольной пластины. Эта формула справедлива в рассматриваемом случае, только в ней надо поменять местами h и l. Имеем

$$J_{O'z}=M(h^2/3+l^2/12);\qquad (OC)^2=(h^2+l^2)/4;\qquad (O'C)=h^2/4.$$

После этого

$$J_{Oz}=M(h^2/3+l^2/12)+M(h^2+l^2-h^2)/4=M(h^2+l^2)/3. \tag{и}$$

Подставляя выражение (и) в (ж), получаем

$$v\leqslant2\sqrt{\frac{gh}{3}(1+l^2/h^2)\left(\sqrt{1+l^2/h^2}-1\right)}.$$

Для случая $l=h$ $v\leqslant\sqrt{1{,}1gh}$. Если $h=2$ м, то

$$v\leqslant4{,}6\ \text{м/с}\approx16{,}6\ \text{км/ч}.$$